Prof. K. Nipp D-ITET, D-MATL, RW Sommer 2013

Basisprüfung Lineare Algebra

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe) werden nicht akzeptiert!
- Tragen Sie die Lösung der Aufgabe 6 (Multiple Choice) auf dem Extrablatt ein.

Bitte wenden!

1. Für welche Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich der Vektor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

darstellen? Bestimmen Sie die Koeffizienten der Linearkombination in Abhängigkeit von α.

2. Die folgenden Punkte liegen annähernd auf einer Kurve mit der Gleichung $y(x) = a_0 + a_1 \cos x$, wobei a_0 und a_1 die unbekannten Parameter sind:

x_i	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	2π
y_i	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{8}$

a) Stellen Sie zu diesen Daten die Fehlergleichungen in der Form $Az - c = r$ auf und geben Sie die Matrix A und den Vektor c an.

b) Lösen Sie die Fehlergleichungen im Sinne kleinster Quadrate.

c) Welcher absolute Fehler ($|y(x_i) - y_i|$) wird an den jeweiligen Messpunkten x_i gemacht?

3. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Auf $\mathcal{P}_2$ ist durch $\big(p_1(x), p_2(x)\big) := \int\limits_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx$ ein Skalarprodukt gegeben.

a) Zeigen Sie für die Basis

$$1, \qquad 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

in $\mathcal{P}_2$, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

b) Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich:

$$p(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad q(x) = p'(x) \in \mathcal{P}_2,$$

die jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $q(x) = p'(x)$ zuordnet ($p'(x)$ bedeutet die Ableitung von $p(x)$ nach x). Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis

$$1, \qquad 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

beschrieben?

Siehe nächstes Blatt!

4. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung, $\dot{y} = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems mit der Anfangsbedingung $y(0) = (1,1,1)^T$ mit Hilfe der Transformationsmethode.

b) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to -\infty$ (Beachten Sie das Vorzeichen).

5. Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3.

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Matrix T der Koordinatentransformation.

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten (in W^3) beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung in den ursprünglichen Koordinaten (in V^3) geometrisch.

6. Multiple Choice:

a) Die folgende Matrix ist invertierbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

genau dann wenn $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

b) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt Kern $A = \{t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$, falls $\alpha = \frac{1}{2}$.

Bitte wenden!

c) Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$$

d) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis beschrieben.

e) Die Menge U definiert einen Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot B = 2 \cdot B \cdot A\}$$

für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig.

f) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt $\det A = -6$.

g) Wir betrachten folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$e^A = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2.$$

h) Gegeben sei eine Matrix A mit Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ mit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Bildes von A^T gleich 1.

Viel Erfolg!